Eine Verallgemeinerung der Steinerschen Formeln

Meyer, Peter

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 28, 1977, S.119-123

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Eine Verallgemeinerung der Steinerschen Formeln

Von **Peter Meyer,** Braunschweig

Vorgelegt von **Hans Robert Müller**

J. Steiner [1] hat 1840 einen Zusammenhang zwischen vier fundamentalen Maßzahlen – dem Volumen V, der Oberfläche F, dem Integral der mittleren Krümmung M und der Gesamtkrümmung $C = 4\pi$ – für konvexe Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum R^3 und dem Volumen $V(\varrho)$ der äußeren Parallelfläche Φ_ϱ im Abstand ϱ angegeben:

$$V(\varrho) = V + F\varrho + M\varrho^2 + \tfrac{1}{3}C\varrho^3. \tag{1}$$

Man sagt: $V(\varrho)$ ist erzeugende Funktion der Maßzahlen V, F, M und C. Durch formales Differenzieren von (1) nach ϱ läßt sich das *Steinersche Formelsystem* [2] für die übrigen Maßzahlen der Parallelfläche gewinnen:

$$\begin{aligned} F(\varrho) &= F + 2M\varrho + C\varrho^2 \\ M(\varrho) &= M + C\varrho \\ C(\varrho) &= C. \end{aligned} \tag{2}$$

Es bestehen die Beziehungen

$$F(\varrho) = V^{\cdot}(\varrho), \quad 2M(\varrho) = F^{\cdot}(\varrho), \quad C(\varrho) = M^{\cdot}(\varrho). \tag{3}$$

Dieses Ergebnis wurde in verschiedener Hinsicht verallgemeinert, so auf den n-dimensionalen Raum [3] und sogar auf *nicht* konvexe, beschränkte, geschlossene Flächen von *D. Ohmann* [4] erweitert. Im folgenden wird die Übertragung des Steinerschen Resultates auf die Einheitssphäre $S^{n+1} \subset R^{n+2}$ vollständig erledigt.

H. Hadwiger [5] wies darauf hin, daß der Begriff der gewöhnlichen Konvexität nicht besonders geeignet ist, bei der Bildung von Parallelflächen eine ausschlaggebende Rolle zu spielen. Er definiert die erweiterten Begriffe *„unterkonvex"* und *„überkonvex"* für abgeschlossene Punktmengen der Sphäre, die in einem Grenzfall die klassische Konvexität enthalten. Wir werden auf diesen mehr topologisch-mengengeometrischen Sachverhalt hier nicht näher eingehen und stellen in Übereinstimmung mit H. Hadwiger fest, daß zu jeder kompakten differentialgeometrischen Hyperfläche $\Phi \subset S^{n+1}$ der Klasse C^3 zwei Skalare $\varrho_1, \varrho_2 \in R_+$ existieren, so daß die folgende Untersuchung für alle Parallelflächen Φ_ϱ mit $-\varrho_1 < \varrho < \varrho_2$ von $\Phi_0 = \Phi$ zutrifft. Die Ergebnisse sind also lokaler Art, sie beziehen sich auf eine Parallelflächenschar aus einer *Flächenumgebung* von Φ.

Es beschreibe

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^i) = \mathbf{x}(u^1, \dots, u^n), \quad \mathbf{x}^2(u^i) \equiv 1 \tag{4}$$

einen Teil einer Hyperfläche Φ der Klasse C^3 – kurz Fläche genannt – auf der Einheitssphäre S^{n+1}. Die Beschränkung auf den Radius 1 ist an sich unwesentlich. Zu Φ definieren wir die Parallelfläche im (mit Vorzeichen versehenen) Abstand ϱ gemessen auf jenen (geodätischen) Kreisen von S^{n+1}, die Φ senkrecht durchsetzen. Diese Parallelfläche Φ_ϱ läßt sich mit dem Einheitsvektor

$$(5)\qquad \mathbf{y}=\mathbf{y}(u^i),\quad \mathbf{y}^2(u^i)\equiv 1,\quad \mathbf{y}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}_l\equiv 0\quad (l=1,\dots,n),$$

der relativen *Flächennormalen* bezüglich S^{n+1} in einfacher Weise darstellen (der Index l bedeutet partielle Differentiation bezüglich u^l; die Abbildung verdeutlicht einen ebenen Kreisschnitt von S^{n+1}). Durch $\mathbf{y}$ wird dann ein Flächenstück auf S^{n+1} beschrieben, das durch gleiche Parameter auf Φ bezogen in homologen Punkten zu Φ total orthogonal ist. Φ_ϱ gestattet die Beschreibung

$$(6)\qquad \mathbf{x}(\varrho)=\mathbf{x}-\mathbf{x}(1-\cos\varrho)+\mathbf{y}\sin\varrho=\mathbf{x}\cos\varrho+\mathbf{y}\sin\varrho.$$

Daher unterliegen die Flächenpunkte beim Übergang von Φ zu Φ_ϱ ebenen Drehungen durch den festen Winkel ϱ um 0 (in der jeweils von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aufgespannten Ebene). Mittels (6) berechnen wir die beiden Fundamentaltensoren der Flächentheorie von Φ_ϱ in Abhängigkeit der entsprechenden Tensoren g_{ij}, L_{ij} von Φ. Mit $g_{ij}:=\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{x}_j$, $L_{ij}:=-\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{y}_j$ und $e_{ij}:=\mathbf{y}_i\cdot\mathbf{y}_j$ ergibt sich

$$\begin{aligned} g_{ij}(\varrho)&=\mathbf{x}_i(\varrho)\cdot\mathbf{x}_j(\varrho)=\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{x}_j\cos^2\varrho+(\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{y}_j+\mathbf{y}_i\cdot\mathbf{x}_j)\cos\varrho\sin\varrho+\\ &+\mathbf{y}_i\cdot\mathbf{y}_j\sin^2\varrho=g_{ij}\cos^2\varrho-2\,L_{ij}\cos\varrho\sin\varrho+e_{ij}\sin^2\varrho.\end{aligned}$$

Geht man mit $2\cos^2\varrho=1+\cos 2\varrho$ und $2\sin^2\varrho=1-\cos 2\varrho$ zum doppelten Winkel über, so wird hieraus:

$$(7)\qquad g_{ij}(\varrho)=\tfrac{1}{2}(g_{ij}+e_{ij})+\tfrac{1}{2}(g_{ij}-e_{ij})\cos 2\varrho-L_{ij}\sin 2\varrho.$$

Lemma 1: Für den Normaleneinheitsvektor $\mathbf{y}(\varrho)$ von Φ_ϱ bezüglich S^{n+1} gilt:

$$(8)\qquad \mathbf{y}(\varrho)=-\mathbf{x}\sin\varrho+\mathbf{y}\cos\varrho.$$

Beweis: Gemäß (5) bestehen die Beziehungen $\mathbf{y}^2(\varrho)\equiv 1$, $\mathbf{y}(\varrho)\cdot\mathbf{x}(\varrho)=\mathbf{y}(\varrho)\cdot\mathbf{x}_l(\varrho)\equiv 0$ $(l=1,\dots,n)$, durch die $\mathbf{y}(\varrho)$ eindeutig bestimmt ist. Daher genügt es zu zeigen, daß die Darstellung (8) diese Gleichungen identisch erfüllt. Mit (6), (8) folgt $\mathbf{y}(\varrho)\cdot\mathbf{x}(\varrho)=(\mathbf{y}^2-\mathbf{x}^2)\cos\varrho\sin\varrho=0$, sowie mit Berücksichtigung der Weingartenschen Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_k&=-g^{ij}L_{jk}\mathbf{x}_i\quad\text{auch}\quad \mathbf{y}(\varrho)\cdot\mathbf{x}_l(\varrho)=\\ &=(-\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}_l+\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}_l)\cos\varrho\sin\varrho+\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}_l\cos^2\varrho-\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}_l\sin^2\varrho=\\ &=-\mathbf{x}\cdot(-g^{ij}L_{jl}\mathbf{x}_i)\sin^2\varrho=0.\ \text{Ferner gilt}\ \mathbf{y}(0)=\mathbf{y}.\end{aligned}$$

Für den zweiten Fundamentaltensor finden wir mit (6), (8)

$$\begin{aligned}L_{ij}(\varrho)&=-\mathbf{x}_i(\varrho)\cdot\mathbf{y}_j(\varrho)=(\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{x}_j-\mathbf{y}_i\cdot\mathbf{y}_j)\cos\varrho\sin\varrho-\\ &-\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{y}_j\cos^2\varrho+\mathbf{y}_i\cdot\mathbf{x}_j\sin^2\varrho=\\ &=(g_{ij}-e_{ij})\cos\varrho\sin\varrho+L_{ij}(\cos^2\varrho-\sin^2\varrho),\end{aligned}$$

und bei Bezugnahme auf das doppelte Argument:

$$(9)\qquad L_{ij}(\varrho)=\tfrac{1}{2}(g_{ij}-e_{ij})\sin 2\varrho+L_{ij}\cos 2\varrho.$$

(7) und (9) erfüllen die Beziehungen

$$(10)\qquad 2\cdot L_{ij}(\varrho)=-\frac{\partial}{\partial\varrho}g_{ij}(\varrho).$$

Die n+1 *Hauptkrümmungen* $M_l(\varrho)$ von Φ_ϱ lassen sich (vgl. etwa [6]) mittels der Koeffizienten des Polynoms n-ten Grades $k_0(\varrho) + k_1(\varrho) \cdot \lambda + \ldots + k_n(\varrho) \cdot \lambda^n := \det(\lambda\, g_{ij}(\varrho) - L_{ij}(\varrho))$ so definieren:

$$M_l(\varrho) = \int_\Phi k_l(\varrho) \cdot (g(\varrho))^{-\frac{1}{2}} du \quad (l = 0, \ldots, n) \tag{11}$$

mit dem Oberflächenelement $du := du^1 \cdots du^n$ und $g(\varrho) := \det(g_{ij}(\varrho))$. Wegen $k_n(\varrho) = g(\varrho)$ ist $M_n(\varrho)$ die Oberfläche von Φ_ϱ. Die Beziehung (10) impliziert

$$\frac{\partial}{\partial\varrho} g(\varrho) = \frac{\partial}{\partial\varrho} k_n(\varrho) = 2 \cdot k_{n-1}(\varrho), \tag{12}$$

wobei lediglich die Differentiationsregel für Determinanten anzuwenden ist. Integriert man (12) über Φ und berücksichtigt (11), so ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen der Oberfläche $M_n(\varrho)$ und der (n-1) -ten Hauptkrümmung von Φ_ϱ:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varrho} M_n(\varrho) &= \int_\Phi \frac{\partial}{\partial\varrho} \sqrt{g(\varrho)}\, du = \int_\Phi \tfrac{1}{2} (g(\varrho))^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial g(\varrho)}{\partial\varrho} du = \\ &= \int_\Phi k_{n-1}(\varrho)\, (g(\varrho))^{-\frac{1}{2}} du = M_{n-1}(\varrho). \end{aligned} \tag{13}$$

Hieraus läßt sich folgendes Ergebnis ablesen:

Satz 1: Für hinreichend kleine ϱ *(aus einer Umgebung von Null) ergibt die Differentiation der Oberfläche* $M_n(\varrho)$ *von* Φ_ϱ *nach* ϱ *gerade die* (n-1) *-te Hauptkrümmung (Integral der mittleren Krümmung) von* Φ_ϱ.

Lemma 2: Für ϱ, σ aus einer Umgebung von Null gilt $(\Phi_\varrho)_\sigma = \Phi_{\varrho+\sigma}$.

Beweis: Gemäß (8) unterliegt die Normale $\mathbf{y}$ beim Übergang zur Parallelfläche Φ_ϱ einer Drehung in der von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ bestimmten Ebene. Mit (6), (8) folgt dann die Behauptung:

$$\begin{aligned} &-\mathbf{x}(\varrho) \sin\sigma + \mathbf{y}(\varrho) \cos\sigma = -(\mathbf{x}\cos\varrho + \mathbf{y}\sin\varrho)\sin\sigma + \\ &+(-\mathbf{x}\sin\varrho + \mathbf{y}\cos\varrho)\cos\sigma = -\mathbf{x}\sin(\varrho+\sigma) + \mathbf{y}\cos(\varrho+\sigma) = \mathbf{y}(\varrho+\sigma), \text{ sowie} \\ &\mathbf{x}(\varrho)\cos\sigma + \mathbf{y}(\varrho)\sin\sigma = (\mathbf{x}\cos\varrho + \mathbf{y}\sin\varrho)\cos\sigma + (-\mathbf{x}\sin\varrho + \mathbf{y}\cos\varrho)\sin\sigma = \\ &= \mathbf{x}\cos(\varrho+\sigma) + \mathbf{y}\sin(\varrho+\sigma) = \mathbf{x}(\varrho+\sigma). \end{aligned}$$

Nach *C. B. Allendoerfer* [6][1]) besteht die Steinersche Formel für die Oberfläche

$$M_n(\varrho) = \sum_{i=0}^{n} M_i (\sin^{n-i}\varrho)(\cos^i\varrho), \tag{14}$$

aus der sich durch Integration über ϱ unmittelbar eine entsprechende Darstellung des Volumens $V(\varrho)$ von Φ_ϱ in Abhängigkeit des Volumens V und der Hauptkrümmungen von Φ ergibt:

$$V(\varrho) = V + \sum_{i=0}^{n} M_i \int_0^\varrho (\sin^{n-i}x)(\cos^i x)\, dx. \tag{15}$$

Mit Lemma 2 führt (14) und (15) somit zu einem vollständigen Steinerschen Formelsystem für alle Hauptkrümmungen $M_l(\varrho)$ $(l = 0, \ldots, n)$:

---

[1]) Herr Professor Dr. J. M. Wills wies mich freundlicherweise auf diese Literaturstelle hin.

Satz 2: *Für* ϱ *aus einer Umgebung von Null lassen sich die Hauptkrümmungen* $M_i(\varrho)$ *von* Φ_ϱ *abhängig von den entsprechenden Maßzahlen* M_i $(i = 0, \ldots, n)$ *von* Φ *folgendermaßen darstellen:*

$$M_k(\varrho) = \sum_{h=0}^{n-k} \sum_{i=h}^{k+h} (-1)^h M_i \binom{n-i}{n-k-h} \binom{i}{h} \cdot \tag{16}$$
$$\cdot (\cos^{n-2h+i-k} \varrho)(\sin^{2h-i+k} \varrho), \quad (k = 0, \ldots, n).$$

Der Beweis zu Satz 2 verläuft in gewohnter Weise durch Gleichsetzen (gemäß Lemma 2) von

$$M_n[(\Phi_\varrho)_\sigma] = \sum_{i=0}^{n} M_i(\varrho)(\sin^{n-i}\sigma)(\cos^i\sigma)$$

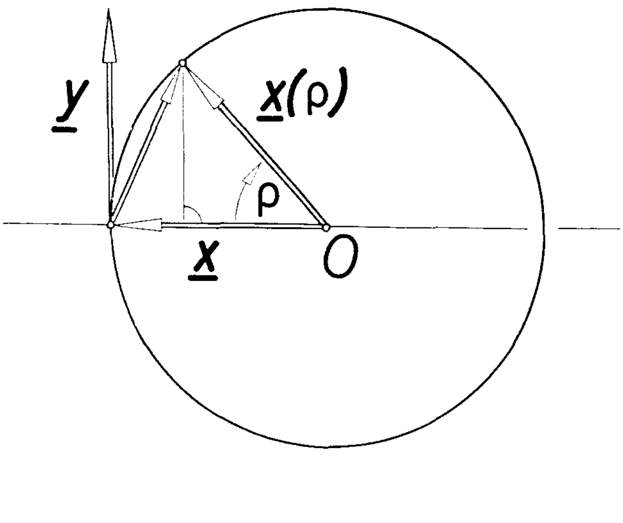
und

$$M_n[\Phi_{\varrho+\sigma}] = \sum_{i=0}^{n} M_i(\sin^{n-i}(\varrho+\sigma))(\cos^i(\varrho+\sigma))$$

in Einklang mit (14), sowie anschließendem Koeffizientenvergleich nach jenen Termen, die allein von σ abhängen.

Mit (16) für $k = n$ beziehungsweise $k = n-1$ läßt sich Satz 1 auch direkt bestätigen.

Setzt man die Krümmung von S^{n+1} nicht gleich Eins, sondern wie bei Allendoerfer allgemeiner $K = \text{konst.}$ und läßt K gegen Null gehen, so ergeben sich aus den mit $K = \text{konst.} = 1$ modifizierten Formeln (15) und (16) die bekannten *Quermaß-integrale* im $(n+1)$-dimensionalen Raum.



Literatur

[1] J. Steiner, Über parallele Flächen, Mber. Preuss. Akad. Wiss. 184, p. 114–118, (1840).

[2] H. Hadwiger, Altes und Neues über konvexe Körper, Birkhäuser Verlag, (1955).

[3] H. Hadwiger, Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Springer Verlag, (1957).

[4] D. Ohmann, Eine Verallgemeinerung der Steinerschen Formeln, Math. Annalen 129, p. 209–212, (1955).

[5] H. Hadwiger, Die erweiterten Steinerschen Formeln für ebene und sphärische Bereiche, Comment. Math. Helv. 18, p. 59–72, (1945).

[6] C.B. Allendoerfer, Steiner's Formulae on general S^{n+1}, Bull. Amer. Math. Soc. 54, p. 128–135, (1948).